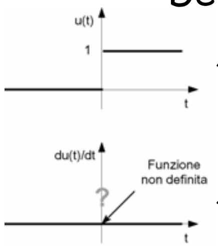
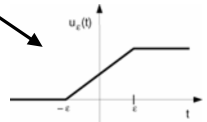
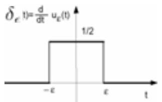
Delta di Dirac (1)



- Cerchiamo la derivata della funzione u(t)

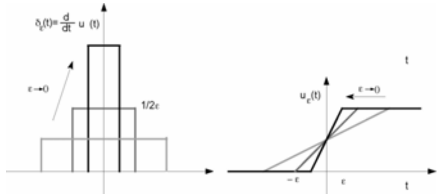




$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon} rect(\frac{t}{2\epsilon})$$

Delta di Dirac (2)

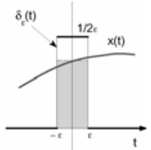
$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon} rect(\frac{t}{2\epsilon}) \qquad u_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_\epsilon(\alpha) d\alpha$$



$$u(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{t} \delta_\epsilon(\alpha) d\alpha$$

Delta di Dirac (3)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta_\epsilon(t)dt$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta_\epsilon(t)dt = \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} x(t)dt = \frac{1}{2\epsilon} 2\epsilon\, x(\bar{t})$$

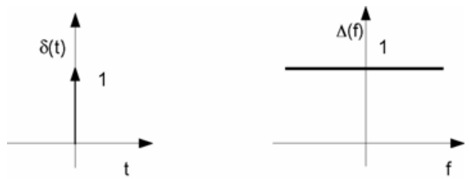
$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta_\epsilon(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0} x(\bar{t}) = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

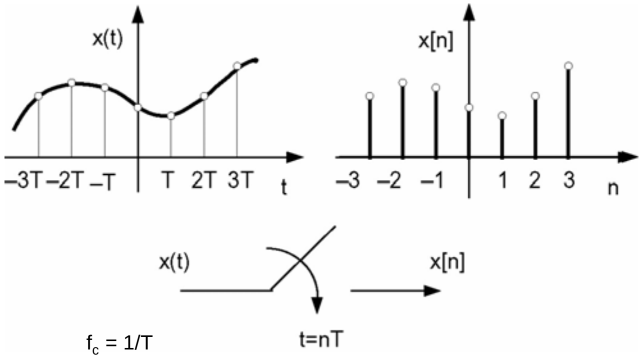
proprieta` campionatrice della Delta

Trasformata della Delta

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i2\pi ft} dt = e^{i2\pi ft}\Big|_0 = 1$$



Dal tempo continuo al tempo discreto



$f_c = 1/T$

Trasformata di Fourier di una sequenza

Ricorda:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n F}$$

con $F = fT$. Inoltre:

$$\bar{X}(F+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n(F+1)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n F} e^{-i2\pi n} = \bar{X}(F)$$

Trasformata di Fourier di una sequenza (2)

$$\bar{X}(f) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T}$$

Inoltre:

$$\bar{X}(f) = \bar{X}(f + \frac{1}{T})$$

Introduciamo:

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T} df$$

$$\bar{X}(f) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T}$$

Moltiplico per un esponenziale ed integro:

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T} df = \int_{-1/2T}^{1/2T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-i2\pi m f T} e^{-i2\pi n f T} df$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{-i2\pi(m-n) f T} df = x[n] \frac{1}{T}$$

per m=n

quindi:

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T} df$$

Sintesi di un segnale a tempo continuo e di una sequenza

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T} df$$

La condizione di Nyquist (1)

$$x[n] = x(nT) \Rightarrow$$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-i2\pi n f T}$$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i2\pi \nu n T} d\nu\right) e^{-i2\pi n f T}$$

$$\bar{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n (f-\nu) T} d\nu$$

La condizione di Nyquist (2)

assumendo che:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

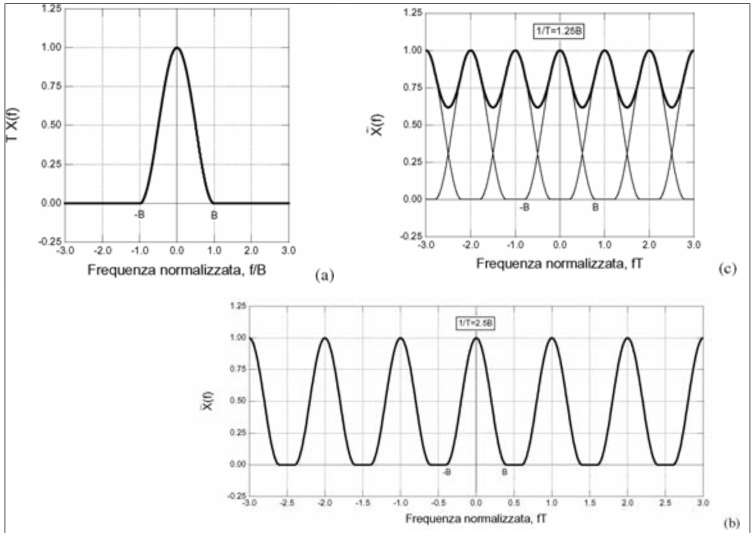
si ottiene:

$$\bar{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \left(f - \frac{k}{T}\right)\right) d\nu$$

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \delta\left(\nu - \left(f - \frac{k}{T}\right)\right) d\nu$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_o)dt = x(t_o)$$

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



La condizione di Nyquist (3)

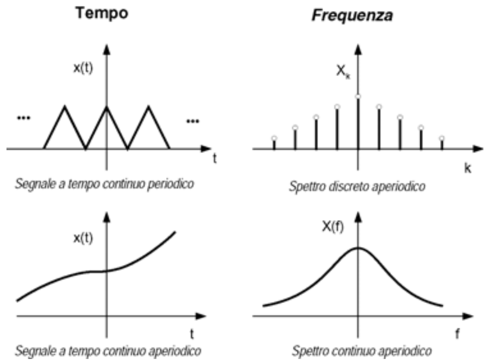
$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})$$

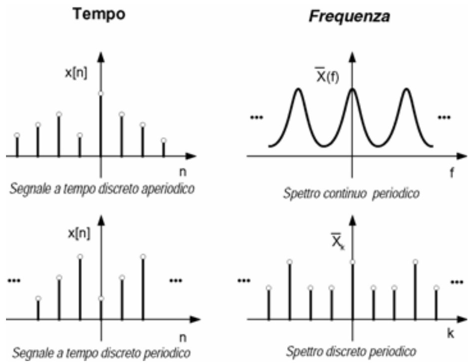
La trasformata di Fourier di una sequenza è la periodicizzazione della trasformata del segnale originale, con una periodicità pari alla frequenza di campionamento $f_c = 1/T$.

Per garantirsi l'assenza di *aliasing*, la frequenza di campionamento deve essere tale che:

$$f_c = \frac{1}{T} \geq 2B$$

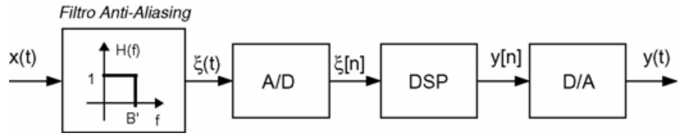
dove B è la banda del segnale.



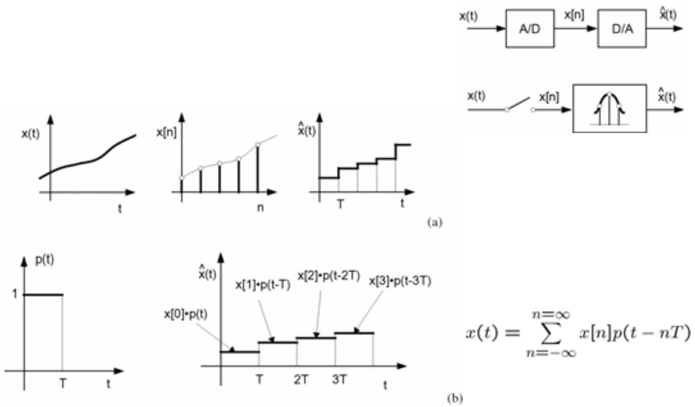


Esempio: segnale audio

- Orecchio umnano limitato in frequenza, fra 20 Hz e 20 kHz
- CD: f_c = 44.1 kHz ; DVD: f_c = 48.1 kHz
- Segnali trasmessi: f_c = 32 kHz



Campionamento e riproduzione



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]p(t-nT)$$

Interpolazione (1)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]p(t-nT)$$

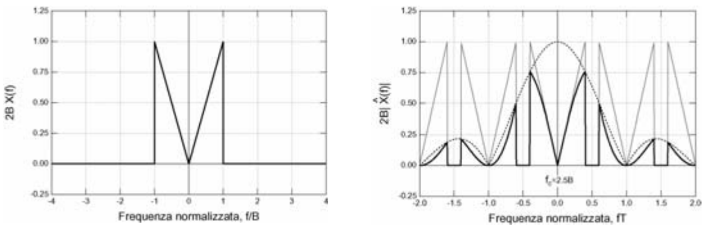
$$p(t) = rect(\frac{t-T/2}{T}) \qquad P(f) = T sinc(fT)e^{i\pi fT}$$

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]P(f)e^{-i2\pi fT} =$$

$$P(f)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i2\pi fT} = P(f)\bar{X}(f)$$

Interpolazione (2)

$$\hat{X}(f) = sinc(fT)e^{i\pi fT}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(f-\frac{k}{T})$$



Interpolazione (3)

Scegliamo p(t) in modo che:

$$P(f) = Trect(fT)$$

$$\hat{X}(f) = P(f)\bar{X}(f) = Trect(fT)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-k/T) = X(f)$$

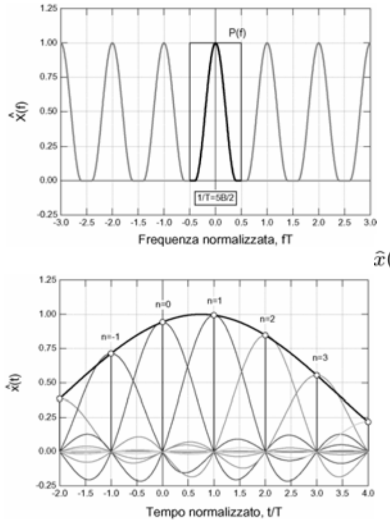
Teorema del campionamento:

Un segnale il cui spettro è limitato nella banda B può essere ricostruito esatamente a partire dai propri campioni, purchè la frequenza di campionamento non sia inferiore a 2B

Interpolazione cardinale

$$Trect(fT)P(f) \leftrightarrow p(t) = sinc\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$



$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

Interpolazione cardinale

$$Trect(fT)P(f) \leftrightarrow p(t) = sinc\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

$$\hat{x}(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc(k-n) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(k-n) = x[k] = x(kT)$$