

link per i files:

<http://ams.pg.infn.it/~ambrosi/corso.html>

libro suggerito:

Teoria dei segnali

M. Luise G.M. Vitetta

McGraw-Hill

G. Ambrosi, UniPG

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali periodici a tempo continuo)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt \quad \text{Analisi}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} \quad \text{Sintesi}$$

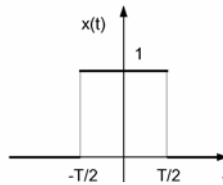
$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

(nota: X_k è in generale complessa)

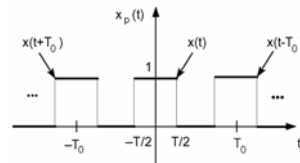
G. Ambrosi, UniPG

Segnali aperiodici a tempo continuo

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t/T| \leq 1/2 \\ 1/2 & |t/T| = 1/2 \\ 0 & |t/T| \geq 1/2 \end{cases}$$



$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$



$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t)$$

G. Ambrosi, UniPG

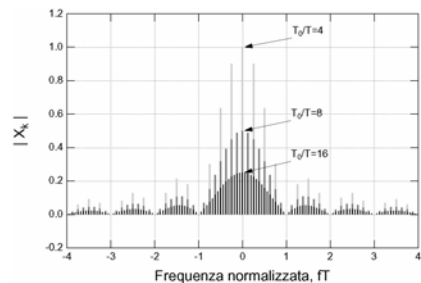
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Cosa succede alla serie di Fourier e ai relativi coefficienti X_k quando $T_0 \rightarrow \infty$?

G. Ambrosi, UniPG

Spettro di ampiezza di $x_p(t)$



G. Ambrosi, UniPG

$$T_0 \rightarrow \infty \quad (1)$$

$$T_0 \rightarrow \infty \quad kf_0 - (k-1)f_0 = f_0 \rightarrow 0$$

Definiamo:

$$X(kf_0) \equiv T_0 X_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi kf_0 t} dt = T \frac{\sin(kf_0 T)}{kf_0 T}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi kf_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi kf_0 t} dt = \frac{e^{-i2\pi kf_0 T/2} - e^{i2\pi kf_0 T/2}}{-i2\pi kf_0}$$

G. Ambrosi, UniPG

$$T_0 \rightarrow \infty \quad (2)$$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(kf_0) e^{i2\pi kf_0 t}$$

$$\Delta f = kf_0 - (k-1)f_0 = f_0$$

Passando al limite per $T_0 \rightarrow \infty$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

G. Ambrosi, UniPG

$$T_0 \rightarrow \infty \quad (3)$$

$$X(kf_0) \equiv T_0 X_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi kf_0 t} dt = T \frac{\sin(kf_0 T)}{kf_0 T}$$

Passando al limite per $T_0 \rightarrow \infty$

$$X(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-i2\pi kf_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Trasformata continua di Fourier del segnale $x(t)$

$$X(f) = A(f) e^{i\theta(f)} \quad \leftarrow \text{Spettro di fase}$$

$$\uparrow \text{Spettro di ampiezza}$$

G. Ambrosi, UniPG

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

Segnale periodico

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Segnale aperiodico

G. Ambrosi, UniPG

Equazioni di analisi e sintesi

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad \text{Eq. di analisi}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad \text{Eq. di sintesi}$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

G. Ambrosi, UniPG

Teoremi (proprietà) della trasformata di Fourier

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Teorema della linearità:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

Teorema di dualità:

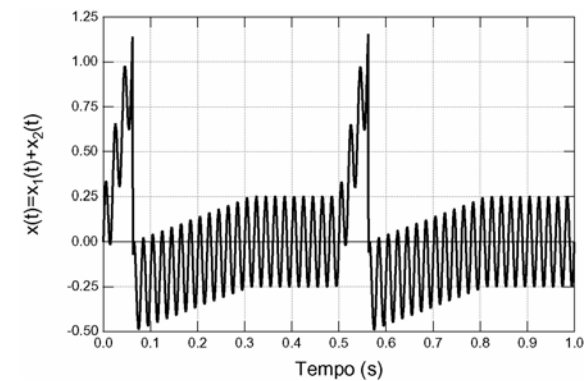
$$x(t) = X(t) \Rightarrow X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

Teorema del ritardo:

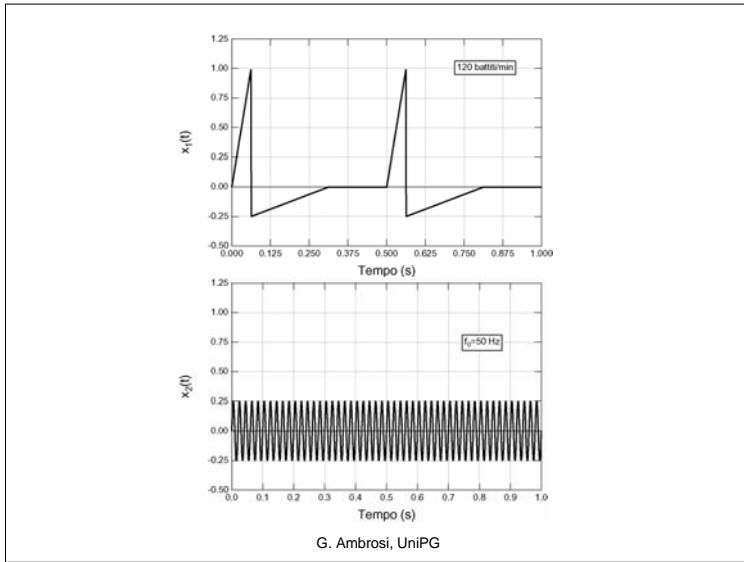
$$x(t) = x(t - t_0) \Rightarrow X(f) = X(f) e^{-i2\pi f t_0}$$

G. Ambrosi, UniPG

Filtri (?)

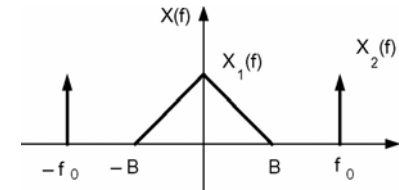


G. Ambrosi, UniPG



Passiamo al dominio frequenziale

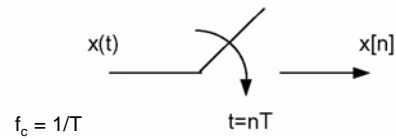
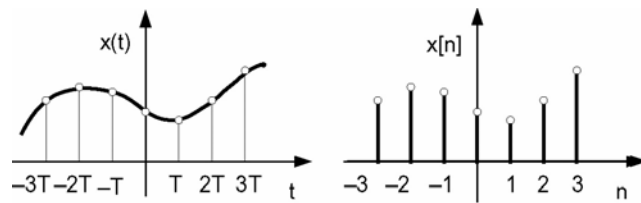
$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$



Abbiamo bisogno di un apparato con caratteristiche di selettività delle differenti componenti frequenziali del segnale: un filtro

G. Ambrosi, UniPG

Dal tempo continuo al tempo discreto



G. Ambrosi, UniPG

Trasformata di Fourier di una sequenza

Ricorda:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i2\pi nF}$$

con $F = fT$. Inoltre:

$$\begin{aligned} \bar{X}(F + 1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i2\pi n(F+1)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i2\pi nF}e^{-i2\pi n} = \bar{X}(F) \end{aligned}$$

G. Ambrosi, UniPG

Trasformata di Fourier di una sequenza (2)

$$\bar{X}(f) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i2\pi n f T}$$

Inoltre:

$$\bar{X}(f) = \bar{X}\left(f + \frac{1}{T}\right)$$

Introduciamo:

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T} df$$

G. Ambrosi, UniPG

$$\bar{X}(f) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i2\pi n f T}$$

Moltiplico per un esponenziale ed integro:

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T} df = \int_{-1/2T}^{1/2T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-i2\pi m f T} e^{i2\pi n f T} df$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{-i2\pi(m-n)fT} df = x[n] \frac{1}{T} \quad \text{per } m=n$$

quindi:

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T} df$$

G. Ambrosi, UniPG

Sintesi di un segnale a tempo continuo e di una sequenza

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

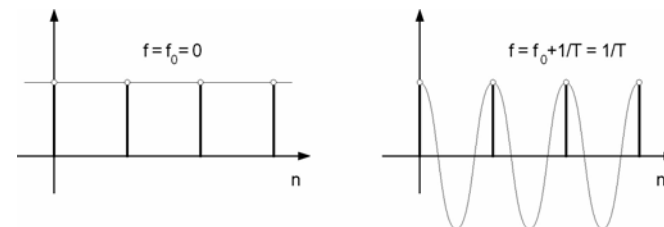
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

$$x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T} df$$

G. Ambrosi, UniPG

Ricorda:

$$e^{i2\pi(f_0 + m/T)nT} = e^{i2\pi f_0 n T} + e^{i2\pi m n} = e^{i2\pi f_0 n T}$$



G. Ambrosi, UniPG

Teoremi (proprietà) della trasformata di Fourier di una sequenza

$$x[n] \Leftrightarrow \bar{X}(f)$$

Teorema della linearità:

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow \bar{X}(f) = a\bar{X}_1(f) + b\bar{X}_2(f)$$

Teorema del ritardo:

$$x[n] = x[n - k] \Rightarrow \bar{X}(f) = \bar{X}(f)e^{-i2\pi kfT}$$

G. Ambrosi, UniPG

La condizione di Nyquist (1)

$$x[n] = x(nT) \Rightarrow$$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i2\pi n f T}$$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)e^{i2\pi \nu n T} d\nu \right) e^{-i2\pi n f T}$$

$$\bar{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n(f-\nu)T} d\nu$$

G. Ambrosi, UniPG

La condizione di Nyquist (2)

assumendo che:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

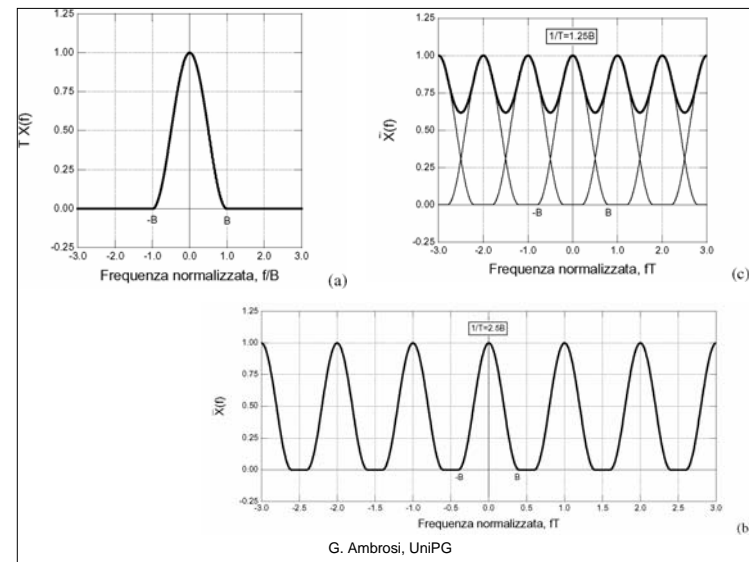
si ottiene:

$$\bar{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \left(f - \frac{k}{T}\right)\right) d\nu$$

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \delta\left(\nu - \left(f - \frac{k}{T}\right)\right) d\nu$$

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

G. Ambrosi, UniPG



La condizione di Nyquist (3)

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})$$

La trasformata di Fourier di una sequenza è la periodizzazione della trasformata del segnale originale, con una periodicità pari alla frequenza di campionamento $f_c = 1/T$.

Per garantirsi l'assenza di *aliasing*, la frequenza di campionamento deve essere tale che:

$$f_c = \frac{1}{T} \geq 2B$$

dove B è la banda del segnale.